

1 Description du Modèle de corrosion

On s'intéresse à un modèle de type processus de Markov déterministe par morceaux (PDMP) de corrosion d'une pièce de petite taille servant de point d'ancrage aux missiles dans un sous-marin. En particulier, on cherche à calculer le temps moyen après lequel la corrosion impose le remplacement de la pièce.

Dans ce processus de modélisation, on suppose que le sous-marin séjourne dans trois milieux différents : l'atelier, l'océan, la cale-sèche. Notons que ces ambiances sont bien évidemment inégalement corrosives. Pour évaluer cette corrosion, il est possible d'introduire des modèles d'EDP portant sur la perte d'épaisseur du métal, chaque équation étant associée à un milieu particulier. Initialement, la pièce bénéficie d'une protection anti-corrosion dont la durée de vie limitée empêche la corrosion du métal. Une fois cette protection disparue, le métal sera progressivement corrodé. Il est donc nécessaire d'étudier les 2 processus suivants :

- 1) disparition de l'anti-corrosif,
- 2) corrosion du métal.

L'approche envisagée ici utilise les PDMP et nécessite l'introduction de 6 états différents décrivant chacun un état particulier de la pièce de métal : présence ou absence de l'anti-corrosion dans chacun des trois milieux (l'atelier, l'océan et la cale-sèche). On note 1, 2 et 3 les états correspondants à l'atelier, l'océan et la cale-sèche avant la perte de la protection anti-corrosion. On note 4, 5 et 6 ces mêmes états après la perte de cette protection. On suppose que le sous-marin passe successivement de l'atelier à l'océan puis à la cale-sèche avant de retourner à l'atelier (voir Figure 1).

La durée de la protection anti-corrosion est tirée au départ suivant une loi de Weibull. Une fois ce temps écoulé, la pièce est progressivement corrodée. La vitesse de corrosion dépend du milieu dans lequel évolue le sous-marin et du temps écoulé depuis la perte de la protection en suivant la loi:

$$\frac{dd}{du} = \rho \left(1 - \exp \left(\frac{u}{\eta} \right) \right)$$

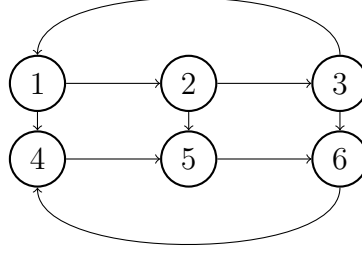


Figure 1: Transition entre états

où d est l'épaisseur en millimètres de la partie corrodée et u le temps écoulé depuis la perte de la protection anti-corrosion. Le facteur η est une constante qui dépend de chaque ambiance; ρ est, pour chaque milieu, le résultat d'un tirage d'une variable aléatoire à loi uniforme à chaque transition d'état. On suppose que les probabilités de transition du sous-marin d'un milieu à un autre sont indépendantes de l'épaisseur de la partie corrodée.

2 Résolution par la méthode des EDP

Pour calculer l'espérance du temps de sortie, qui représente ici le temps moyen après lequel la corrosion impose le remplacement de la pièce, il est possible de procéder de manière déterministe. En effet, l'espérance d'un processus PDMP est solution d'un système d'équations aux dérivées partielles (essentiellement constitué d'équation de transport) possédant autant d'équation qu'il y a d'états dans le PDMP.

2.1 États sans protection anti-corrosion

Le système d'EDP à résoudre pour les états 4, 5 et 6, *i.e.*, les états dans lequel la protection anti-corrosion a été perdue, est le suivant:

$$\rho \left(1 - \exp \left(\frac{u}{\eta_1} \right) \right) \frac{\partial f_4}{\partial d} + \frac{\partial f_4}{\partial u} + \lambda_1 G_5 - \lambda_1 f_4 + 1 = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left(1 - \exp \left(\frac{u}{\eta_2} \right) \right) \frac{\partial f_5}{\partial d} + \frac{\partial f_5}{\partial u} + \lambda_2 G_6 - \lambda_2 f_5 + 1 = 0 \quad (2)$$

$$\rho \left(1 - \exp \left(\frac{u}{\eta_3} \right) \right) \frac{\partial f_6}{\partial d} + \frac{\partial f_6}{\partial u} + \lambda_3 G_4 - \lambda_3 f_6 + 1 = 0. \quad (3)$$

Afin de discrétiser ce système, nous utilisons une grille cartésienne en d et u (voir Figure 2). Ici, pour $i = 4, 5, 6$, $f_i(d, \rho, u)$ représente l'espérance du temps

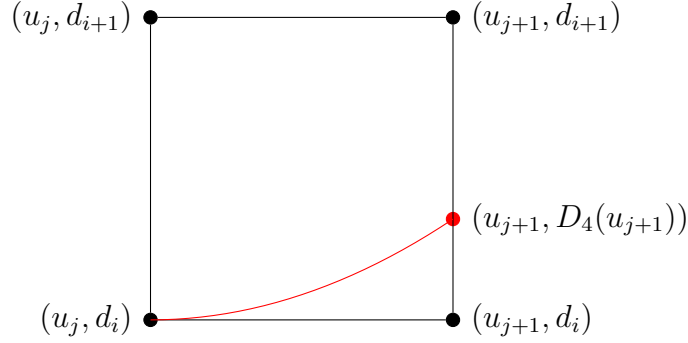


Figure 2: Caractéristique dans une maille et semi-Lagrangian

de vie (temps pour lequel la corrosion dépasse 2mm d'épaisseur) lorsque le système est dans l'état i et que la protection anti-corrosion a été perdue depuis u heures. Les conditions aux limites associées aux équations sont

$$f_4(0.2, \rho, u) = f_5(0.2, \rho, u) = f_6(0.2, \rho, u) = 0.$$

Le couplage entre les équations s'effectue à travers les termes G_5 , G_6 et G_4 définis pour $i = 4, 5, 6$ par

$$G_i(d, u) = \frac{1}{|\rho_{\max} - \rho_{\min}|} \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} f_i(d, \rho, u) d\rho.$$

La prise en compte de ces termes de couplages nécessite la mise en oeuvre d'une procédure de point fixe : on se donne un jeu de valeurs initiales pour les G_i , on calcule alors les solutions f_i correspondantes du système (1)-(3). Ensuite nous recalculons de nouvelles fonctions G_i en utilisant les valeurs de f_i trouvées. On itère alors le procédé jusqu'à la convergence de celui-ci. Notons que cette procédure itérative est rendue nécessaire par l'utilisation de schémas implicites.

Pour discrétiser les équations (1)-(3), nous employons la méthode suivante. Supposons G_5 connue sur le carré $[u_j, u_{j+1}] \times [d_i, d_{i+1}]$. Il est alors possible de calculer exactement la valeur de $f_4(u_j, \rho, d_i)$ en fonction de G_5 par la formule

$$\begin{aligned} f_4(d_i, \rho, u_j) &= f_4(D_4(u_j), \rho, u_j) \\ &= \exp(-\lambda_1(u_{j+1} - u_j)) f_4(D_4(u_{j+1}), \rho, u_{j+1}) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda_1} (1 - \exp(-\lambda_1(u_{j+1} - u_j))) \\ &\quad + \lambda_1 \int_{u_j}^{u_{j+1}} \exp(-\lambda_1(u - u_j)) G_5(D_4(u), u) du. \end{aligned} \tag{4}$$

Dans la formule (4), D_4 désigne la caractéristique (courbe rouge dans la Figure 2) associée à l'équation de transport et peut être calculée explicitement. Pour calculer f_4 , il reste alors à choisir une manière d'interpoler $f_4(D_4(u_{j+1}), \rho, u_{j+1})$ et $G_5(D_4(u), u)$. Pour $f_4(D_4(u_{j+1}), \rho, u_{j+1})$, on choisit une interpolation linéaire entre $f_4(d_i, \rho, u_{j+1})$ et $f_4(d_{i+1}, \rho, u_{j+1})$. Pour $G_5(D_4(u), u)$, on procède à une interpolation de type Q_1 entre $G_5(d_i, u_j)$, $G_5(d_{i+1}, u_j)$, $G_5(d_i, u_{j+1})$ et $G_5(d_{i+1}, u_{j+1})$. On applique ensuite le même procédé pour calculer (f_5, G_6) et (f_6, G_4) . Nous concluons cette section en rappelant que l'on applique alors la procédure de point fixe décrite ci-dessus.

2.2 États avec protection anti corrosion

Une fois les espérances de temps de vie f_4 , f_5 et f_6 connues à l'aide de la méthode décrite dans la Section 2.1, il nous reste à étudier le système suivant, portant sur les états 1, 2 et 3

$$-\frac{\partial f_1}{\partial \gamma} + \frac{\partial f_1}{\partial u} + \lambda_1(G_2 - f_1) + 1 = 0, \quad (5)$$

$$-\frac{\partial f_2}{\partial \gamma} + \frac{\partial f_1}{\partial u} + \lambda_2(G_3 - f_2) + 1 = 0, \quad (6)$$

$$-\frac{\partial f_3}{\partial \gamma} + \frac{\partial f_1}{\partial u} + \lambda_3(G_1 - f_3) + 1 = 0, \quad (7)$$

où la variable γ représente le temps restant jusqu'à la perte de la protection anti-corrosion.

Il convient de faire attention aux conditions initiales. Si dans le modèle PDMP, u représente le temps écoulé depuis la fabrication de la pièce, alors les conditions initiales sont

$$f_1(0, \rho, u) = f_4(0, \rho, u),$$

$$f_2(0, \rho, u) = f_5(0, \rho, u),$$

$$f_3(0, \rho, u) = f_6(0, \rho, u).$$

Si u représente le temps écoulé depuis la perte de la protection anti corrosion alors les conditions initiales sont:

$$f_1(0, \rho, u) = f_4(0, \rho, 0), \quad (8)$$

$$f_2(0, \rho, u) = f_5(0, \rho, 0), \quad (9)$$

$$f_3(0, \rho, u) = f_6(0, \rho, 0). \quad (10)$$

C'est ce dernier choix que nous avons privilégié. On remarque que le système (5)-(7) est couplé au système (1)-(3) via les conditions initiales. Pour le

système (5)-(7), il est aisé de voir que les caractéristiques sont les mêmes pour toutes les composantes. Il est donc avantageux de calculer les solutions en suivant les caractéristiques, ce qui nous amène à la résolution d'une EDO ordinaire qui peut être discrétisée grâce à une méthode de Runge Kutta, d'ordre 4 par exemple.

3 Résultats numériques

Dans cette section, nous présentons un résultat numérique qui illustre les méthodes décrites ci-dessus. Dans la Figure 3, nous avons représenté l'espérance du temps de sortie pour les états 4, 5, 6. Le temps de sortie est placé en ordonnée, le temps u depuis la perte de la protection anti-corrosion est placé en abscisse. Nous avons considéré le cas $d = 0$. L'espérance final du temps de sortie est alors égal à 221312 heures (le temps final considéré est de 2^6 heures). Le nombre de points en la variable ρ est de 50, celui pour d est de 50 aussi et celui pour u est de 2000.

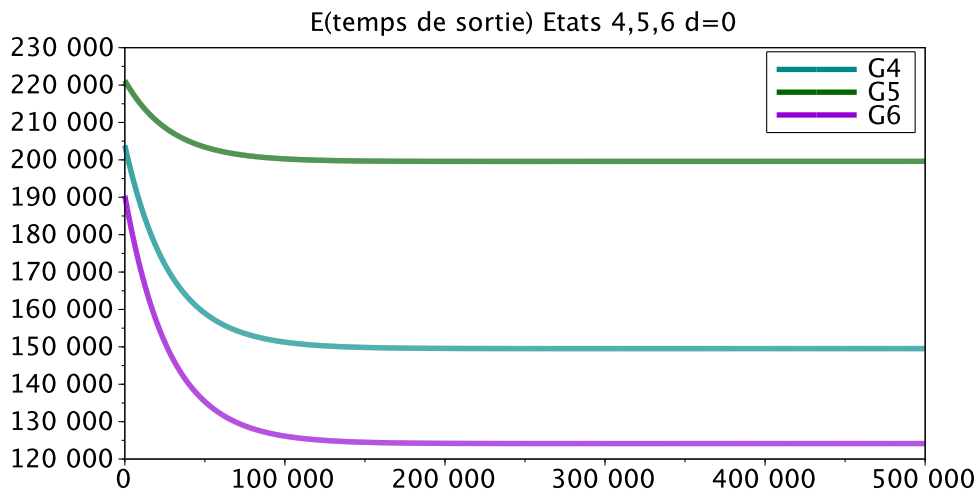


Figure 3: Espérances du temps de sortie pour les états 4,5 et 6