Modélisation de propagation de fissure par un PDMP

Romain Azaïs, Anne Gégout-Petit, Marie Touzet, Charles Elegbede

IMB – Equipe CQFD, INRIA – LMP – EADS Astrium

Réunion GTR 22

Plan

1. Pourquoi un modèle stochastique ?
   - Les données de Virkler
   - L'aléa dans la modélisation
2. Ajustement sur les données de Virkler
   - Ajustement par morceaux
   - Résultats obtenus
3. Modèles de propagation de fissure
   - Modèle général
   - Principe d'actualisation
4. Simulations et validation du modèle
   - Simulations
   - Critères numériques de validation
   - Validation croisée et comparaison avec un modèle sans saut

INRIA

Loi de Paris-Erdogan (propagation de fissure)

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}N} = C(\Delta\sigma\sqrt{\pi})^m \cos\left(\frac{\pi}{\omega}a\right)^{-\frac{m}{2}} a^{\frac{m}{2}} \tag{P-E}$$

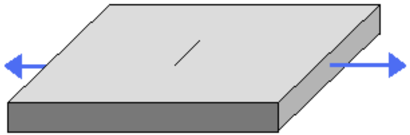
$\hookrightarrow$ évolution déterministe

Loi de Paris-Erdogan (propagation de fissure)

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta\sigma\sqrt{\pi})^m \cos\left(\frac{\pi}{\omega}a\right)^{-\frac{m}{2}} a^{\frac{m}{2}} \quad \text{(P-E)}$$

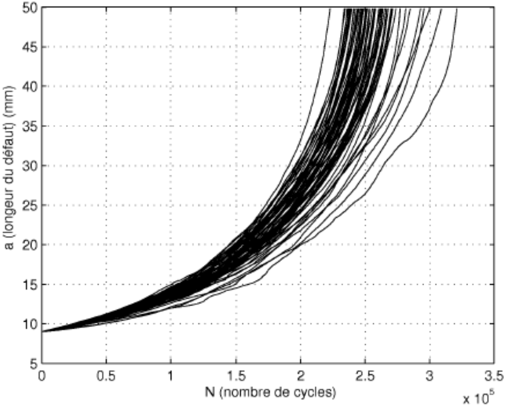
$\hookrightarrow$ évolution déterministe

Expérience de Virkler



$\Delta\sigma = 48.28\text{MPa}$ et $\omega = 152.4\text{mm}$

Données expérimentales de Virkler



$\hookrightarrow$ dispersion importante !

Les données de Virkler

- 68 éprouvettes préfissurées (9mm)
- Contrainte cyclique d'amplitude constante
- 164 mesures par éprouvette
- Arrêt à la longueur 49.8mm (1/3 de l'éprouvette)

Loi de Paris-Erdogan

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}N} = C(\Delta\sigma\sqrt{\pi})^m \cos\left(\frac{\pi}{\omega}a\right)^{-\frac{m}{2}} a^{\frac{m}{2}} \qquad \text{(P-E)}$$

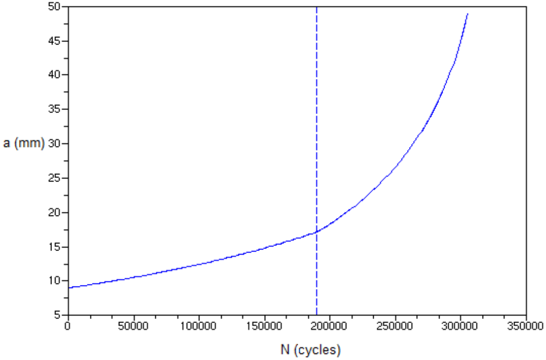
Suivant les modélisations, le couple de paramètres (m, C) peut être :

- une variable aléatoire "choisie" à l'instant initial,
- un processus évoluant dans un espace continu,
- **une chaîne de Markov à temps continu.**

Evolution du processus

A préciser :

- la loi initiale des paramètres,
- la loi du temps de saut,
- le noyau de transition pour les paramètres.



Plan

1. Pourquoi un modèle stochastique ?
   - Les données de Virkler
   - L'aléa dans la modélisation
2. Ajustement sur les données de Virkler
   - Ajustement par morceaux
   - Résultats obtenus
3. Modèles de propagation de fissure
   - Modèle général
   - Principe d'actualisation
4. Simulations et validation du modèle
   - Simulations
   - Critères numériques de validation
   - Validation croisée et comparaison avec un modèle sans saut

Données de Virkler

68 courbes : $\left\{(N_q^{(k)}, a_q^{(k)})_{1 \leq q \leq 164}\right\}_{1 \leq k \leq 68}$

Données de Virkler

68 courbes : $\left\{(N_q^{(k)}, a_q^{(k)})_{1\leq q\leq 164}\right\}_{1\leq k\leq 68}$

$a_{th}(m_1, C_1, T, m_2, C_2)$: courbe théorique définie par morceaux

$$\text{pour } 0 \leq N < T,\ a_{th}(N) \quad : \quad \text{P-E de paramètres } m_1 \text{ et } C_1$$

$$\text{pour } N \geq T,\ a_{th}(N) \quad : \quad \text{P-E de paramètres } m_2 \text{ et } C_2$$

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}N} = C(\Delta\sigma\sqrt{\pi})^m \cos\left(\frac{\pi}{\omega}a\right)^{-\frac{m}{2}} a^{\frac{m}{2}} \qquad \text{(P-E)}$$

INRIA

Ajustement par morceaux

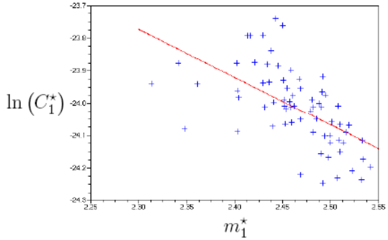
Pour chaque fissure k, on minimise

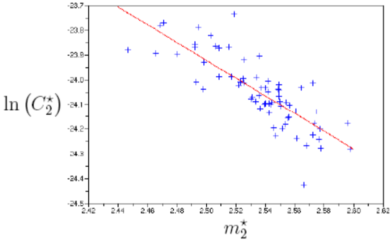
$$\sum_{q=1}^{164} \left\{ a_q^{(k)} - a_{th}(m_1, C_1, T, m_2, C_2)(N_q^{(k)}) \right\}^2$$

(Somme des carrés des écarts verticaux)

$$\hookrightarrow \left(m_1^{(k)\star}, C_1^{(k)\star}, T^{(k)\star}, m_2^{(k)\star}, C_2^{(k)\star} \right)$$

Quelques statistiques des résultats obtenus





Quelques statistiques des résultats obtenus

	min	max	moyenne	écart-type
$m_1^\star$	2.313	2.541	2.462	4.6810^{-2}
$\ln(C_1^\star)$	-24.247	-23.740	-24.013	$1.18.10^{-1}$
$\overline{N}^\star$	28207	258046	118004	51577
$m_2^\star$	2.446	2.597	2.535	$3.14.10^{-2}$
$\ln(C_2^\star)$	-24.423	-23.736	-24.048	$1.39.10^{-1}$

Plan

1. Pourquoi un modèle stochastique ?
   - Les données de Virkler
   - L'aléa dans la modélisation
2. Ajustement sur les données de Virkler
   - Ajustement par morceaux
   - Résultats obtenus
3. Modèles de propagation de fissure
   - Modèle général
   - Principe d'actualisation
4. Simulations et validation du modèle
   - Simulations
   - Critères numériques de validation
   - Validation croisée et comparaison avec un modèle sans saut

PDMP pour la propagation de fissures

$$\forall N \geq 0, \quad X_N = (\nu_N, \zeta_N)$$

Espace d'états du mode

$$\nu_N \in \mathcal{M} \times \mathcal{C} \quad \text{de cardinal fini}$$

On utilise les résultats d'ajustement pour déterminer :

- l'espace $\mathcal{M} \times \mathcal{C}$,
- l'intensité de saut $\lambda_{(m,C)}$,
- le noyau de transition M des paramètres.

Description du PDMP

1 - Choix aléatoire des paramètres initiaux

$$\nu_0 = (m, C) \in \mathcal{M} \times \mathcal{C} \qquad (\text{et } \zeta_0 = 9)$$

2 - Evolution déterministe pendant un temps aléatoire

$$\forall 0 \leq N < T,\ \zeta_N \ :\ \text{P-E de paramètres } m \text{ et } C$$

$$\text{avec } \mathbb{P}(T > s) = \exp\{-\lambda_{(m,C)} s\}$$

3 - Transition aléatoire des paramètres

à l'instant T, saut du mode selon un noyau de transition M :

$$\nu_T = (\tilde{m}, \tilde{C}) \in \mathcal{M} \times \mathcal{C}$$

4 - Nouvelle évolution déterministe

$$\forall N \geq T,\ \zeta_N \ :\ \text{P-E de paramètres } \tilde{m} \text{ et } \tilde{C}$$

Description du PDMP

1 - Choix aléatoire des paramètres initiaux

$$\nu_0 = (m, C) \in \mathcal{M} \times \mathcal{C} \qquad (\text{et } \zeta_0 = 9)$$

2 - Evolution déterministe pendant un temps aléatoire

$$\forall 0 \leq N < T, \ \zeta_N \ : \ \text{P-E de paramètres } m \text{ et } C$$

$$\text{avec } \mathbb{P}(T > s) = \exp\{-\lambda_{(m,C)} s\}$$

3 - Transition aléatoire des paramètres

à l'instant T, saut du mode selon un noyau de transition M :

$$\nu_T = (\tilde{m}, \tilde{C}) \in \mathcal{M} \times \mathcal{C}$$

4 - Nouvelle évolution déterministe

$$\forall N \geq T, \ \zeta_N \ : \ \text{P-E de paramètres } \tilde{m} \text{ et } \tilde{C}$$

Description du PDMP

1 - Choix aléatoire des paramètres initiaux

$$\nu_0 = (m, C) \in \mathcal{M} \times \mathcal{C} \qquad (\text{et } \zeta_0 = 9)$$

2 - Evolution déterministe pendant un temps aléatoire

$$\forall 0 \leq N < T, \ \zeta_N \ : \ \text{P-E de paramètres } m \text{ et } C$$

$$\text{avec } \mathbb{P}(T > s) = \exp\{-\lambda_{(m,C)} s\}$$

3 - Transition aléatoire des paramètres

à l'instant T, saut du mode selon un noyau de transition M :

$$\nu_T = (\tilde{m}, \tilde{C}) \in \mathcal{M} \times \mathcal{C}$$

4 - Nouvelle évolution déterministe

$$\forall N \geq T, \ \zeta_N \ : \ \text{P-E de paramètres } \tilde{m} \text{ et } \tilde{C}$$

Description du PDMP

1 - Choix aléatoire des paramètres initiaux

$$\nu_0 = (m, C) \in \mathcal{M} \times \mathcal{C} \qquad (\text{et } \zeta_0 = 9)$$

2 - Evolution déterministe pendant un temps aléatoire

$$\forall 0 \leq N < T, \ \zeta_N \ : \ \text{P-E de paramètres } m \text{ et } C$$

$$\text{avec } \mathbb{P}(T > s) = \exp\{-\lambda_{(m,C)} s\}$$

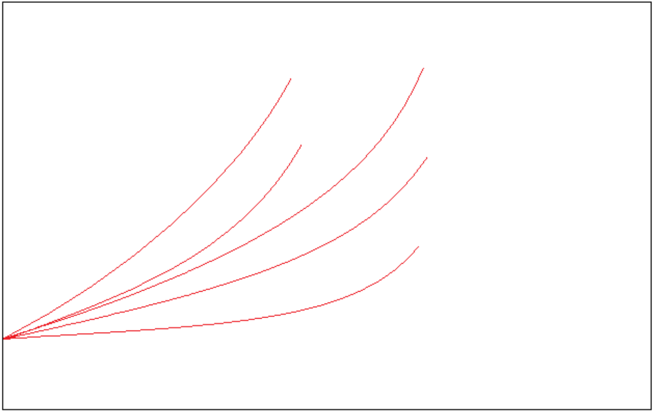
3 - Transition aléatoire des paramètres
à l'instant T, saut du mode selon un noyau de transition M :

$$\nu_T = (\tilde{m}, \tilde{C}) \in \mathcal{M} \times \mathcal{C}$$

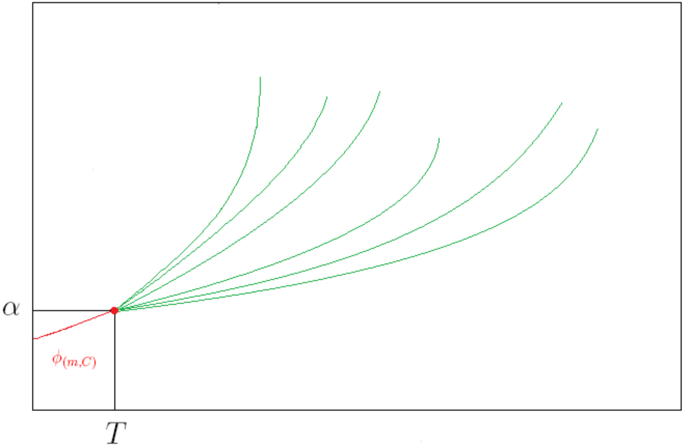
4 - Nouvelle évolution déterministe

$$\forall N \geq T, \ \zeta_N \ : \ \text{P-E de paramètres } \tilde{m} \text{ et } \tilde{C}$$

Loi initiale du mode



Transition du mode



Actualisation

Pour la fissure k, on dispose des l premières mesures

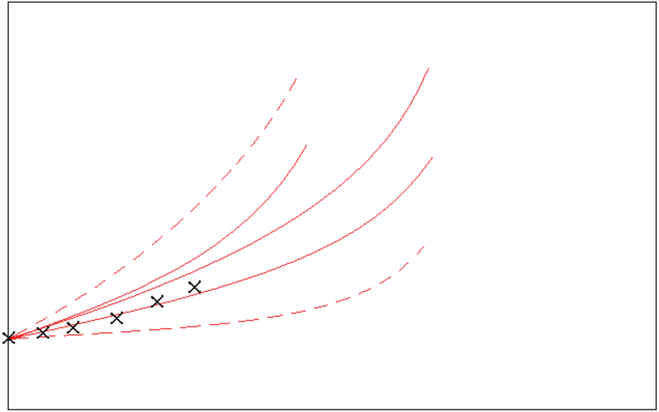
$$(N_q^{(k)}, a_q^{(k)})_{1 \leq q \leq l}$$

Principe d'actualisation ← modèle général modifié

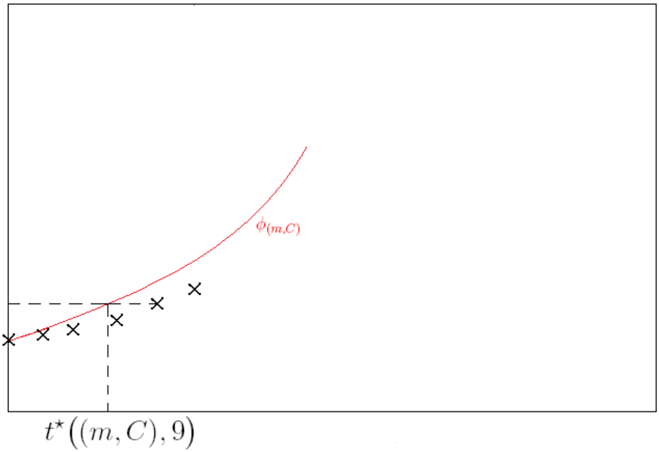
On prend en compte les l mesures :

- nouvelle loi initiale du mode
- saut contraint au bout d'un temps ne dépendant que de ν_0
- nouvelle matrice de transition

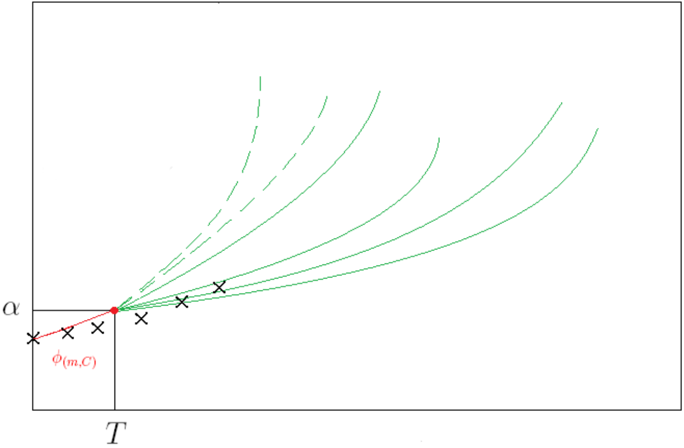
Nouvelle loi initiale du mode



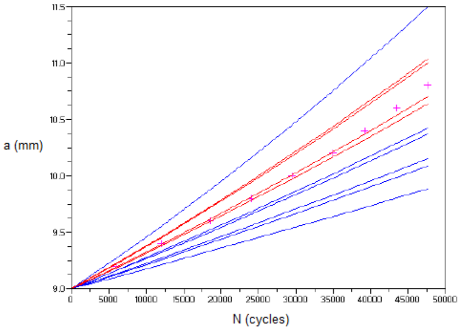
Instant de transition forcée



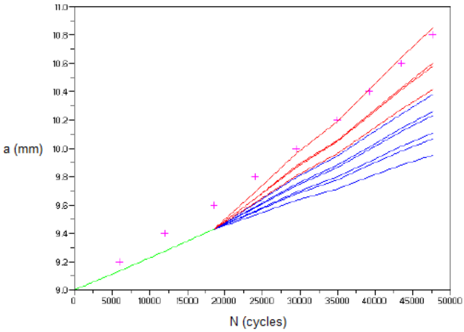
Nouvelle loi de transition



Loi initiale (simulations)



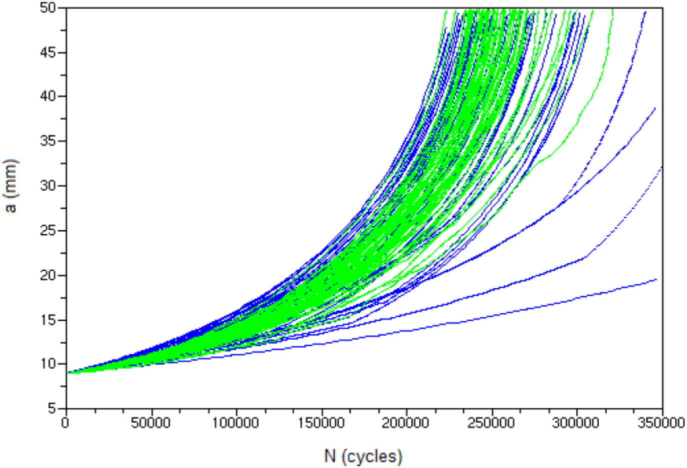
Loi de transition (simulations)



Plan

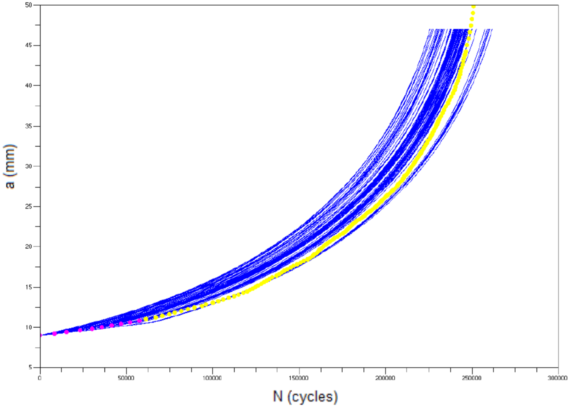
1. Pourquoi un modèle stochastique ?
   - Les données de Virkler
   - L'aléa dans la modélisation
2. Ajustement sur les données de Virkler
   - Ajustement par morceaux
   - Résultats obtenus
3. Modèles de propagation de fissure
   - Modèle général
   - Principe d'actualisation
4. Simulations et validation du modèle
   - Simulations
   - Critères numériques de validation
   - Validation croisée et comparaison avec un modèle sans saut

Simulations selon le modèle général



faisceau simulé (Card($\mathcal{M} \times \mathcal{C}$) = 40) et données de Virkler

Faisceau de prédiction pour la fissure 67



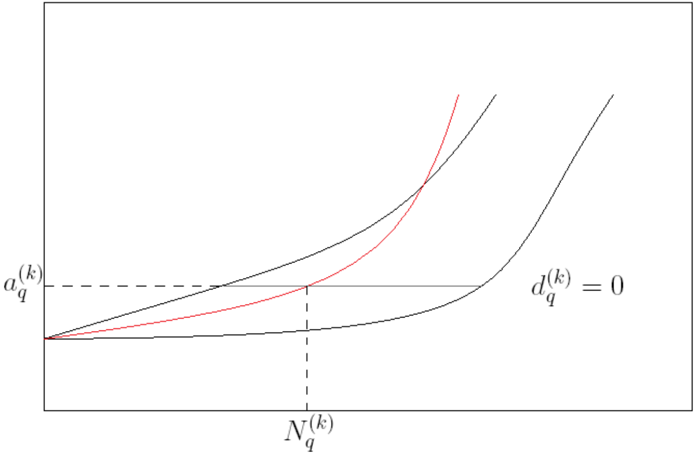
Critères numériques de validation

Faisceau simulé selon le principe d'actualisation

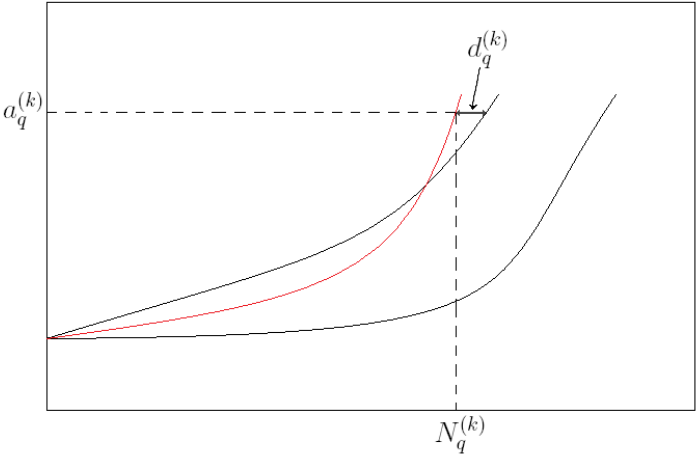
$$\mathcal{F}^{(k)} = \left\{ f_1^{(k)}, \ldots, f_{100}^{(k)} \right\} \quad \text{où } f_j^{(k)} : \text{courbe simulée}$$

Critère numérique : *distance* de $\mathcal{F}_k$ à la courbe k

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}^{(k)}, \text{« fissure } k \text{ »}) = \frac{1}{N_Q^{(k)}} \sum_{q=l+1}^{Q} d_q^{(k)}$$



$a_q^{(k)}$
$d_q^{(k)} = 0$
$N_q^{(k)}$


$d_q^{(k)}$
$a_q^{(k)}$
$N_q^{(k)}$

Critères retenus

- $\mathcal{D}$: distance au faisceau (sans unité),
- $d_Q^{(k)}$: distance pour la dernière mesure (en nombre de cycles),
- dispersion du faisceau (en nombre de cycles).

Validation croisée : *leave one out*

Modèle PDMP avec actualisation – $\mathrm{Card}(K) = 20$

- pour 40% des fissures : $\mathcal{D}(\mathcal{F}^{(k)}, \text{« fissure } k \text{ »}) = 0$
- pour 70% des fissures : $\mathcal{D}(\mathcal{F}^{(k)}, \text{« fissure } k \text{ »}) < 1$
- pour 66% des fissures : $d_Q^{(k)} = 0$

Comparaison avec un modèle sans saut

Fissures rapides

	Modèle PDMP	Modèle sans saut
$\mathcal{D}(\mathcal{F}^{(k)}, \text{« fissure } k \text{ »}) = 0$	8/11	0/11
$\mathcal{D}(\mathcal{F}^{(k)}, \text{« fissure } k \text{ »}) < 1$	11/11	1/11
$d_Q^{(k)} = 0$	9/11	7/11
dispersion moyenne	6191 cycles	9468 cycles

Comparaison avec un modèle sans saut

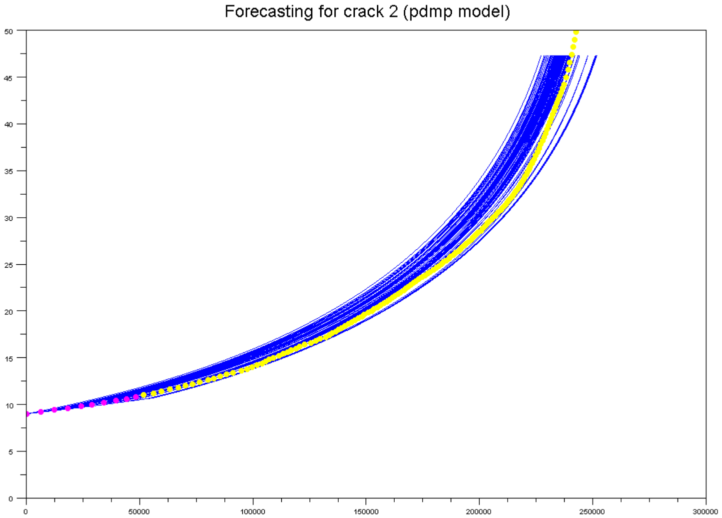
Fissures lentes

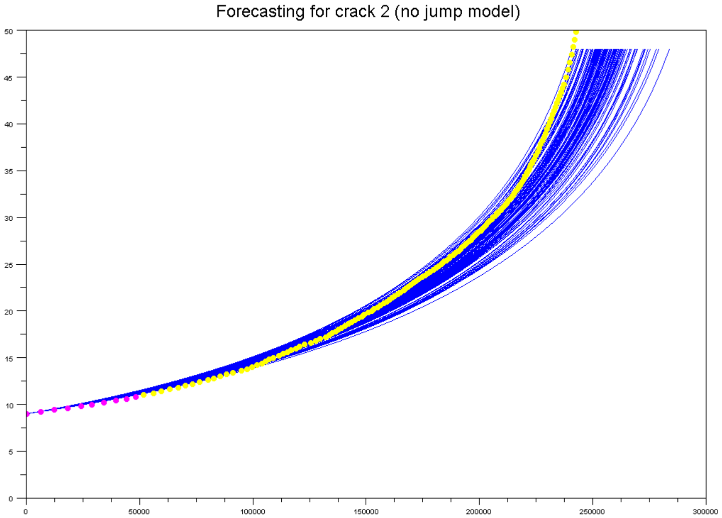
	Modèle PDMP	Modèle sans saut
$\mathcal{D}(\mathcal{F}^{(k)}, « \text{ fissure } k\text{ »}) = 0$	$0/7$	$0/7$
$\mathcal{D}(\mathcal{F}^{(k)}, « \text{ fissure } k\text{ »}) < 1$	$0/7$	$0/7$
$d_Q^{(k)} = 0$	$1/7$	$1/7$
dispersion moyenne	9863 cycles	8988 cycles
moyenne de $d_Q^{(k)}$	30644 cycles	15007 cycles

Comparaison avec un modèle sans saut

Fissures "standards"

	Modèle PDMP	Modèle sans saut
$\mathcal{D}(\mathcal{F}^{(k)}, \text{« fissure } k \text{ »}) = 0$	18/50	1/50
$\mathcal{D}(\mathcal{F}^{(k)}, \text{« fissure } k \text{ »}) < 1$	38/50	23/50
$d_Q^{(k)} = 0$	35/50	49/50
dispersion moyenne	7593 cycles	9130 cycles


Forecasting for crack 2 (pdmp model)
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
0
50000
100000
150000
200000
250000
300000


Forecasting for crack 2 (no jump model)
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
0
50000
100000
150000
200000
250000
300000

Bibliographie

- J. Chiquet, N. Limnios & M. Eid : **PDMPs applied to fatigue crack growth modelling**, J.S.P.I. 139 (2009) 1657-1667
- M.H.A. Davis : **Piecewise-deterministic Markov Processes : A General Class of Non-diffusion Stochastic Models**, J.R.Statist. Soc. B. (1984), 46, No.3, pp. 353-388
- F. Perrin : **Prise en compte des données expérimentales dans les modèles probabilistes pour la prévision de la durée de vie des structures**, thèse de doctorat
- D.A. Virkler, B.M. Hillberry & P.K. Goel, 1979, **The statistical nature of fatigue crack propagation**, J. Engng Mater Tech , Trans. ASME, 101 : 148-153