Evaluation des performances

ANR-09-SEGI-004

Rapport partiel de la tâche 2

1 Présentation

Nous avons pour l'instant travaillé sur le système modèle du réservoir équippé de deux vannes en entrée et d'une vanne en sortie. Quand les vannes tombent en panne elles ne peuvent être réparées, et les lois de commande sont définies pour tenter de maintenir le système dans des conditions normales de fonctionnement.

Etant donné un état initial (caractérisé par la hauteur d'eau h dans le réservoir, la température θ de l'eau et l'état de chacune des trois vannes : Ouverte, Fermée, Ouverte bloquée ou Fermée bloquée), nous souhaitons estimer la probabilité E de surchauffe du système partant d'un état initial donné. Cette quantité E est considérée comme une fonction de h, de θ et de l'état des trois vannes. Pour fixer les idées, on décide de calculer, par exemple la valeur de cette fonction E au point $(h, \theta) \sim (7, 31)$ qui est le point de fonctionnement standard du système avec une vanne en entrée ouverte et la vanne en sortie ouverte (état 1). Tant qu'aucune vanne ne tombe en panne le système reste dans cet état.

Partant de cet état initial, 36 autres états possibles du système sont donc identifiés comme atteignables. Parmi ceux-ci seulement 17 peuvent mener à la situation de surchauffe avant toute autre avarie du réservoir. Ainsi, pour chacun des 17 états possibles, la fonction E satisfait des équations différentielles (ordinaires ou partielles) qui sont bien entendu toutes couplées entre elles et posées sur des domaines différents (dépendant essentiellement de l'état du système) et de dimensions différentes. On réfère à la thèse de K. Gonzalez [1] pour les détails du modèle et les différentes notations utilisées.

Plusieurs approches sont possibles pour résoudre de tels systèmes. Une première méthode (qu'on pourra appeler Eulérienne) consiste à résoudre par un schéma numérique de type Volumes Finis par exemple, l'ensemble de toutes les équations dans le domaine 2D "maximal" mais en autorisant des solutions à valeurs mesures. C'est par exemple la solution mise en place dans [2, 3]. Les supports des solutions ainsi obtenues représentent alors les différents domaines discutés plus haut. Un des problèmes de cette approche est que, bien entendu, le schéma numérique ne fournit pas de solutions à valeurs mesures. Ainsi, bien que le schéma converge, les solutions approchées ont un support étalé qui ne correspond pas au comportement attendu.

Une autre approche pour la résolution de ces équations (déterministes) a été proposée dans a thèse de K. Gonzalez [1] par des schémas de type différences finies adaptés. Les schémas considérés dans ce travail n'utilisaient pas totalement la structure très particulière des équations et par ailleurs, utilisaient le fait que certaines quantités liées au modèle pouvaient être calculées explicitement (car les EDO décrivant l'évolution de h et θ dans le réservoir sont suffisamment simples pour être intégrées à la main). Le premier travail que nous avons entrepris a été de proposer une méthode numérique potentiellement plus précise et peut-être plus facilement généralisable.

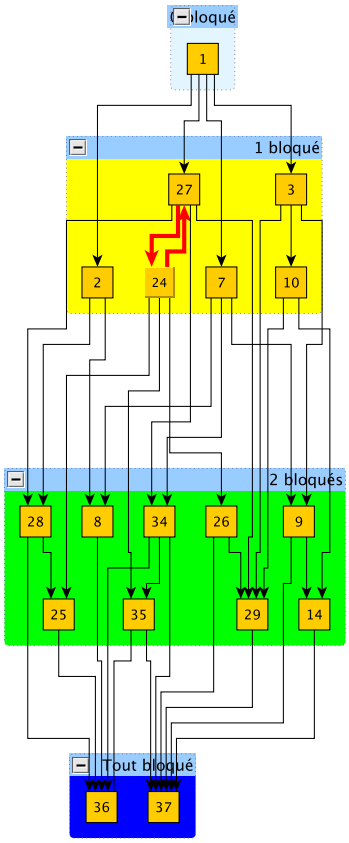

Figure 1: Allure complète du graphe

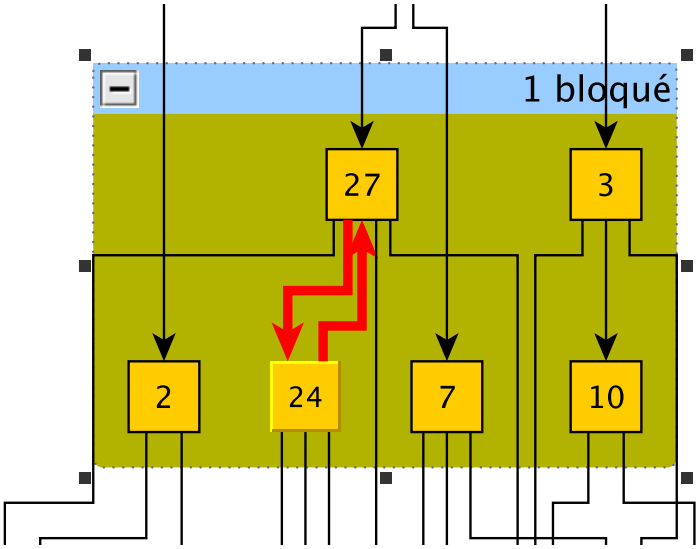

Figure 2: Zoom sur l'ensemble des états correspondant à une vanne bloquée

2 Présentation rapide du schéma proposé

La plupart des équations contenues dans le modèle sont en réalité des équations différentielles du premier ordre posées le long de courbes caractéristiques (définies par l'évolution en temps de la hauteur h et de la température θ). Il est donc relativement aisé de les résoudre directement en variables caractéristiques. Par ailleurs, il est assez aisé d'implémenter des schémas d'ordre élevé pour résoudre ces EDO, ce qui permet d'envisager une montée en ordre de la méthode à moindre coût.

Pour limiter la perte de précision, il est toutefois nécessaire de prendre garde à la position des points de discrétisation en essayant de les placer de façon judicieuse pour que ces points coincident avec les points de discrétisation des autres inconnues du système et ainsi éviter toute perte de précision due à diverses interpolations qui seraient nécessaires sans cela. Rappellons en effet que les 17 équations du système sont couplées : certaines à travers les conditions aux limites, d'autres à travers les coefficients des équations, etc ...

Parmi les 17 états possibles, la plus grande difficulté provient de la présence de deux inconnues et équations complètement bidimensionnelles et couplées dans le système. Ceci peut se visualiser dans le graphe complet 1 ou sur le zoom 2 par la présence d'un cycle fermé entre les états 24 et 27. Ce couplage a néanmoins lieu uniquement à travers les conditions aux limites associées à ces deux équations car le passage de l'état 24 à l'état 27 (et réciproquement) ne peut-être dû qu'à l'action d'une des lois de commande celle-ci ne se déclenchant que lorsque la hauteur d'eau atteint une valeur maximale ou minimale (ceci est dû au fait que nous supposons que les pannes des vannes sont irréversibles et donc potentiellement généralisable à d'autres systèmes plus complexes vérifiant cette même hypothèse).

L'idée est donc de calculer par une méthode numérique standard (Euler, Crank-Nicholson, RK4, ...) les courbes caractéristiques associées à ces deux états en s'arrangeant pour que celles-ci coincident exactement sur les bords du domaine $h = 6$ et $h = 8$ en les points ou le couplage va s'effectuer.

Une difficulté supplémentaire provient du fait suivant : dans l'hypothèse où le système ne connaîtrait aucune panne, le nombre de transitions entre 24 et 27 tend vers l'infini quand le temps tend vers l'infini. Asymptotiquement le système tend vers une dynamique cyclique particulière (dans le plan (h, θ)) dans laquelle la trajectoire associée à l'état 24 et la trajectoire associée à l'état 27 connectent les deux mêmes points.

Dans le cadre du calcul envisagé dans ce travail, il est clair que nous devons effectuer une approximation, en supposant que le système atteint potentiellement cette trajectoire périodique en temps fini (mais grand). Cette approximation est certainement raisonnable du moment que ce temps limite choisi au début du calcul est suffisament grand. L'influence de ce choix peut être étudiée *a posteriori*.

Le calcul des courbes caractéristiques est illustré dans les figures suivantes.

- Première étape (Figure 3).
  - On commence par calculer la courbe caractéristique associée à l'état 27 partant du point $(7, \theta_1)$ (en bleu) (avec un pas de maillage Δx fixé à l'avance). La hauteur d'eau diminue dans le système alors que la température augmente. Quand h atteint la valeur 6, pour une certaine température θ_1^{27} calculée par le schéma, une commande est activée et le système passe dans l'état 24.
  - On calcule maintenant la caractéristique associée à l'état 24 issue de ce point $(6, \theta_1^{27})$ (en pointillés rouge). Elle atteint la hauteur $h = 8$ pour une certaine température θ_1^{24}.

- Et ainsi de suite, on construit la famille de courbes caractéristiques (bleues et rouges) comme illustré sur la figure 3
- On arête le processus lorsque $|\theta_n^{24} - \theta_{n+1}^{24}|$ est plus petit que l'erreur d'approximation du schéma numérique utilisé pour la résolution des caractéristiques (donc par exemple de l'ordre de Δx pour un schéma du premier ordre). On considère alors avoir atteint l'état cyclique évoqué ci-dessus.

- Deuxième étape (Figure 4). Il est nécessaire de compléter ces calculs par des courbes caractéristiques intermédiaires entre celles déjà calculées. On procède de la façon suivante.
  - On effectue un maillage (en θ) de taille approximativement égale à Δx de l'axe vertical $\{h = 8\}$ passant par les points déjà calculés. A partir de tous les points de ce maillage 1D on calcule les caractéristiques associées à l'état 27 (en bleu).
  - On procède de façon similaire pour les courbes caractéristiques de l'état 24 (en bleu).
  - Noter que, a priori, seules les courbes caractéristiques calculées dans la première partie ont la propriété de coincider sur les bords. On pourrait faire en sorte que ce soit le cas pour toutes les autres mais cela ne semble pas utile.

- In fine on dispose d'une sorte de double maillage du domaine $6 \leq h \leq 8$ et $32 \leq \theta \leq 100$ sur lesquels chacune des probabilités de panne associées à l'état 24 d'une part et à l'état 27 d'autre part vont être calculées par résolution d'une EDO le long de leurs caractéristiques respectives, le couplage ayant lieu *via* le bord du domaine uniquement en les points où les caractéristiques coïncident.

Nous n'avons décrit ici que la partie la plus délicate de la mise en place du schéma. Une fois ce travail préliminaire de construction des "maillages" est effectué, l'ensemble de la résolution du système couplé des 17 équations peut se faire "simplement" par un schéma standard de type Euler, Crank-Nicolson ou autre le long des courbes incriminées.

Le système ayant une strucuture essentiellement triangulaire (à l'exception des états 24 et 27 qui sont fortement couplés), tous les calculs doivent se faire dans un ordre précis. Il faut prendre à garde à calculer certaines inconnues sur le maillage bleu, d'autres sur le maillage rouge, en fonction des besoins ultérieurs du calcul.

3 Bilan et résultats

La méthodologie proposée repose entièrement sur la dynamique en temps du système sous-jacent et se ramène donc toujours à des résolutions d'équations différentielles ordinaires. On ne résout donc jamais d'équations aux dérivées partielles multi-D dans cette approche, ce qui est un gain appréciable en précision et en possibilité de généralisation mais aussi en temps de calcul. Nous n'avons en particulier pas besoin d'utiliser un maillage potentiellement non structuré du domaine. Tout ceci sera appréciable, si on applique le même genre de stratégie à des systèmes dont la dimension de l'espace d'état est beaucoup plus grande, on pourra sûrement profiter de l'abaissement de dimension proposé et la possibilité de vectoriser/parallèliser une partie importante des calculs.

Pour l'instant, le schéma proposé a été codé en Scilab sur le cas test du réservoir et nous entrons dans une phase de tests ou nous allons comparer les résultats à ceux obtenus par l'ancien code de calcul développé sur cet exemple à l'INRIA mais aussi à ceux obtenus par des méthodes stochastiques de type Monte-Carlo ou par les méthodes de Volumes Finis multi-D évoquées en introduction.

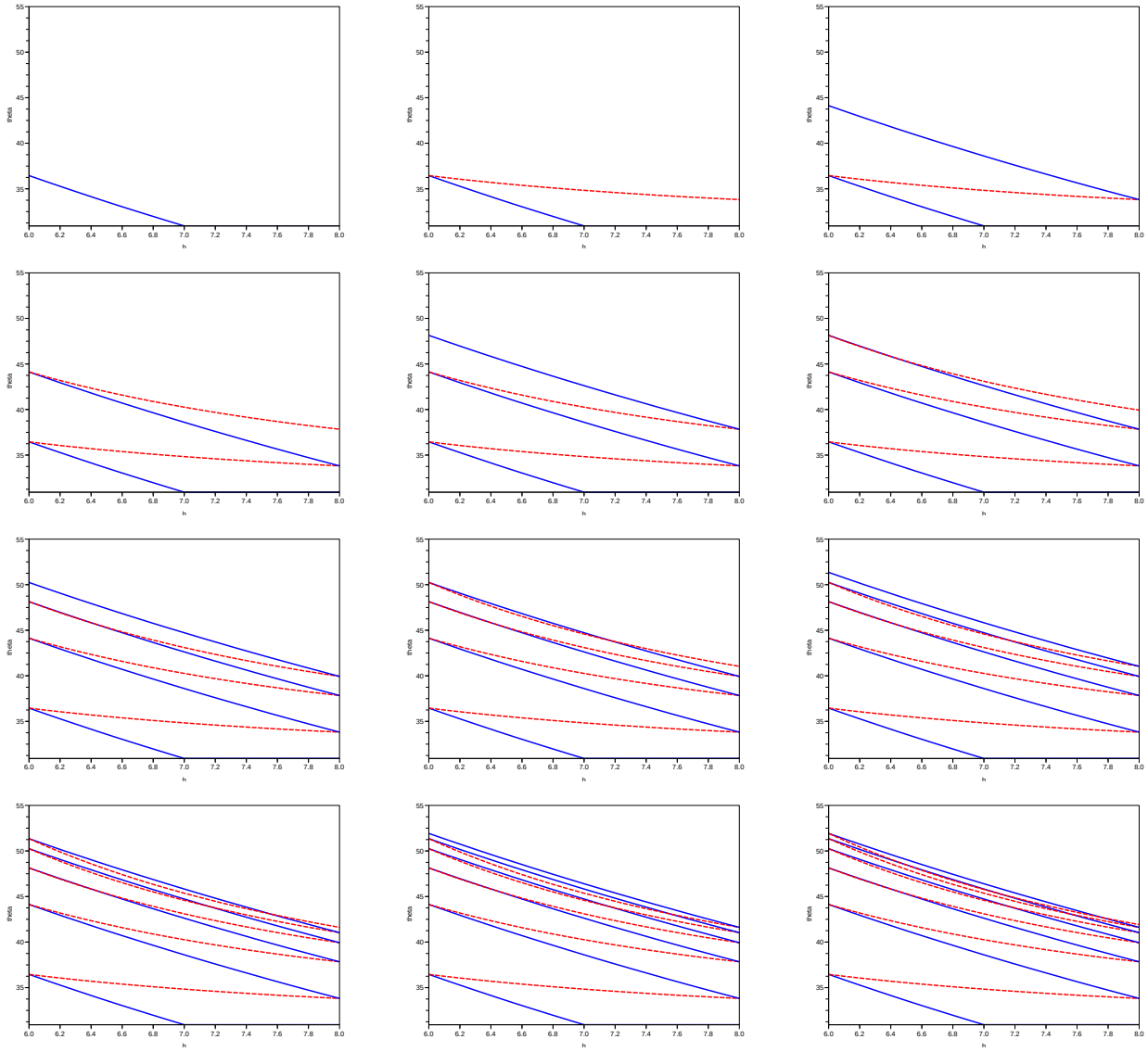

Figure 3: Construction progressive des premières caractéristiques pour les états 24 et 27 (de gauche à droite et de haut en bas)

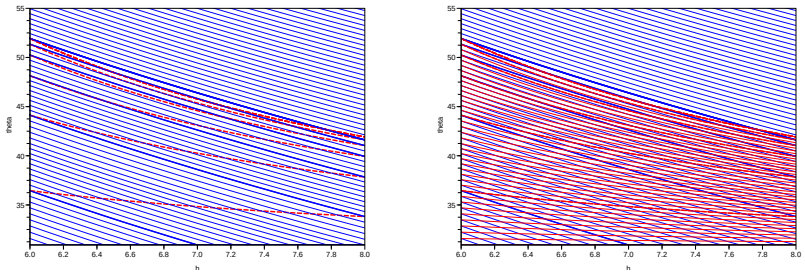

Figure 4: On complète le “maillage” d’abord en construction les courbes bleues (à gauche) puis les courbes rouges (à droite)

4 Poursuite du travail

Une fois la méthodologie et le code de calcul validé, nous essaierons d'une part de nous intéresser à une éventuelle analyse d'erreur de l'algorithme global mais aussi à la théorie d'existence et unicité des solutions du système d'EDO et d'EDP couplées va être commencée. Cette étape du travail va certainement être facilitée par la compréhension que nous avons maintenant du système après le travail numérique déjà réalisé.

Il est en effet très vraissemblable que l'essentiel de la difficulté théorique réside dans l'existence du cycle limite dans le plan de phase correspondant aux états 24 et 27, comme on l'a vu dans la partie numérique.

Enfin, l'application des idées développées ici à des modèles plus proches des intérêts industriels des autres partenaires du projet sera un objectif à plus long terme.

References

[1] Gonzalez K. Contribution à l'étude des processus Markoviens déterministes par morceaux. Thèse université Bordeaux 1, 2010.

[2] Eymard R., Mercier S. Comparison of numerical methods for the assessment of production availabilitu of a hybrid system Reliability Engineering and System Safety, vol. 93, pp. 168-177, 2008.

[3] Lair W., Mercier S., Rousseau M., Ziani R. Processus markoviens déterministes par morceaux et quantification déterministe avec un schéma de volumes finis : un cas d'étude. Proceedings du congrès Lmabda-Mu 17, 2010.