Estimation of the points of regime change by breaking detection techniques, properties of the estimators

ANR-09-SEGI-004

Partial report of team CQFD on task 1.1.1

L'objectif de cette tâche est de proposer des méthodes d'estimation des paramètres d'un Processus Markovien Déterministe par Morceaux (PDMP en abrégé). Le partenaire concerné est l'INRIA CQFD. Les personnes impliquées sont R. Azaïs et A. Gégout-Petit.

1 Contexte

L'un des objectifs du projet ANR Fautocoes est d'utiliser les PDMP pour modéliser les systèmes physiques complexes et les phénomènes tels que la propagation de fissures dans les structures mécaniques. La modélisation par les PDMP est intéressante dans ce contexte car elle permet de s'appuyer sur les lois de propagation de fissures issues de la mécanique ; ces lois intervenant dans le flot déterministe du PDMP. Il faut donc modéliser les changements de régime de propagation en des temps aléatoires par des changements stochastiques de loi mécanique ou des paramètres de ces lois en cours de propagation. Cependant, l'estimation de l'intensité de saut λ et de celle du noyau de transition q n'est possible que si à chaque instant, le régime courant est connu et si les instants de changements de régime du processus (ie les T_n du PDMP) sont aussi connus. Dans un bon nombre de cas, on n'observe pas le PDMP dans sa globalité mais on observe uniquement la variable continue et pas nécessairement la variable discrète c'est-à-dire le régime de propagation.

Le premier problème relève donc des techniques de détections de rupture dans les données de propagation afin de déterminer d'une part les temps de changements de régime et d'autre part les paramètres du flot régissant la dynamique de la variable physique.

2 Approche

Nous n'avons pas développé pour l'instant d'outils théoriques spécifiques pour ce problème mais nous avons cherché les techniques stochastiques connues qui nous permettent d'estimer le régime de propagation courant et l'instant de changement dans un contexte bien précis. A partie de données de propagation de fissures [12], et sous l'hypothèse d'un unique changement de régime par fissure, nous avons estimé les temps de sauts par une méthode de recuit simulé. Le recuit simulé permet d'optimiser des fonctionnelles. [5], [9], [10], [11]. Pour nous il s'agit de déterminer les valeurs des paramètres qui minimisent une distance entre la courbe théorique définie par ces paramètres et une courbe expérimentale donnée. Ce travail est très lié aux tâches 1-2-1 et 1-2-2 car il a servi à la propagation de fissures dans de l'aluminium sous chargement de fatigue uniaxial et sinusoïdal d'amplitude constante. Il permet de proposer un modèle de PDMP simple qui a le mérite d'être plus facilement interprétable que celui estimé et proposé dans [7].

3 Résultats

La loi empirique de Paris-Erdogan est donnée par l'équation différentielle suivante : si a est la longueur du défaut, elle est solution de l'équation différentielle :

$$y' = C(\Delta\sigma\sqrt{\pi})^m \cos(\frac{\pi}{\omega}y)^{-\frac{m}{2}} y^{\frac{m}{2}} \tag{1}$$

où la condition initiale est du type $y(0) = a_0$ (défaut initial). Les paramètres de cette équation différentielle sont m et C les autres quantités sont connues. On dispose du jeu de données de Virkler [12] :

$$\left(a_k^{(q)}, N_k^{(q)}\right)_{1\leq q\leq Q}$$

$a_k^{(q)}$ est la longueur de la fissures k au bout de $N_k^{(q)}$ cycles. On veut trouver une courbe théorique qui approche au mieux cette courbe expérimentale. On définit d'abord et on note $a_{th}^{m,C}(N)$ la solution de l'équation (1) au temps N. Si on suppose que la fissure se propage exactement comme dans le modèle de Paris-Erdogan de paramètre (m, C) alors $a_{th}^{m,C}(N)$ est la longueur théorique de cette fissure au bout de N cycles. Pour ajuster au mieux la courbe k à une courbe expérimentale qui change de régime exactement une fois, on définit une courbe théorique par morceaux de la manière suivante :

$$a_{th}^{m^1,C^1,m^2,C^2,\mathbf{T}}(N) = a_{th}^{m^1,C^1}(N)\mathbf{1}_{[0,\mathbf{T}[}(N) \; + \; a_{th}^{m^2,C^2}(N)\mathbf{1}_{[\mathbf{T},+\infty[}(N)$$

où l'initialisation sur le premier morceau se fait par :

$$a_{th}^{m^1,C^1}(0) = a_0 = 9 \text{ mm}$$

et où l'initialisation sur le second morceau se fait ainsi :

$$a_{th}^{m^1,C^1}(\mathbf{T}) = \lim_{N \to \mathbf{T}} a_{th}^{m^1,C^1}(N)$$

On définit une application $\hat{\mathbf{V}}_k$ qui mesure l'écart de cette courbe théorique à la courbe expérimentale :

$$\hat{\mathbf{V}}_k(m^1, C^1, m^2, C^2, \mathbf{T}) = \sum_{q=1}^{164} \left[a_{th}^{m^1,C^1,m^2,C^2,\mathbf{T}}(N_k^{(q)}) - a_k^{(q)}\right]^2$$

L'objectif est de minimiser cette application de 5 variables pour chacune des fissures afin de savoir quel est l'instant de saut optimal. Les meilleurs paramètres $(m^1, C^1, m^2, C^2, \mathbf{T})$ sont ceux qui minimisent la somme des carrés des écarts verticaux $\hat{\mathbf{V}}_k(m^1, C^1, m^2, C^2, \mathbf{T})$. Pour résoudre ce problème d'optimisation, nous avons appliqué la méthode du recuit simulé à chacune des 68 fissures mesurées par Virkler [12]. Nous avons programmé dans Scilab [6].

Les résultats de cette optimisation par la méthode du recuit simulé ont permis d'approcher chacune des courbes expérimentales par des courbes théoriques et ainsi d'estimer les paramètres $(m^1, C^1, m^2, C^2, \mathbf{T})$ pour chacune des 68 fissures. Cette méthode reposait sur l'hypothèse forte d'un seul changement de régime sur la période de propagation. L'analyse statistique des 68 données de $(m^1, C^1, m^2, C^2, \mathbf{T})$ a permis de construire un modèle de PDMP pour la propagation dans l'aluminium. Ce modèle a été validé par une méthode d'actualisation qui fonctionne bien.

4 Diffusion

Ces résultats ont été présentés plusieurs fois lors de séminaire ou congrès [1], [2], [3], [4] et ont donné lieu à publication dans des actes de congrès [3].

Références

Publications de l'équipe Fautocoes

[1] R. Azais, A. Gégout-Petit, M. Touzet **Modélisation de propagation de fissure par un processus markovien déterministe par morceaux**, Journées MAS et Journée en l'honneur de Jacques Neveu, Bordeaux 2010.

[2] A. Gégout-Petit, Anne, **Modèles probabilistes pour l'initiation et la propagation de fissures**, Journées MAS et Journée en l'honneur de Jacques Neveu, Bordeaux 2010.

[3] R. Azais, C. Elegbede, A. Gégout-Petit, M. Touzet **Estimation, simulation et prévision d'un modèle de propagation de fissures par des processus markoviens déterministes par morceaux**, Actes du congrès lambda-mu 17, 17e Congrès de Maîtrise des Risques et de Sûreté de Fonctionnement 5-7 octobre 2010 La Rochelle , 2010.

[4] R. Azais, C. Elegbede, A. Gégout-Petit, M. Touzet **Estimation, simulation et prévision d'un modèle de propagation de fissures par des processus markoviens déterministes par morceaux**, Séminaire du groupe de recherche en méthodologie de l'IMdR, 2010.

Références dans le texte

[5] N. Bartoli & P. Del Moral : **Simulation et algorithmes stochastiques**, Une introduction avec applications, aux éditions Cépaduès.

[6] S. L. Campbell, J.-P. Chancelier & R. Nikoukhah : **Modeling and Simulation in Scilab/Scicos**, aux éditions Springer, 2006.

[7] J. Chiquet : **Modélisation et estimation des processus de dégradation avec application en fiabilité des structures**, thèse de doctorat, Université Technologique de Compiègne, 2007.

[8] M. Duflo : **Algorithmes stochastiques**, aux éditions Springer, collection Mathématiques et Applications, 1996.

[9] D. Petritis : **Markov Chains on measurable spaces**, Lecture notes - Université de Rennes 1.

[10] Jeff. S. Rosenthal : **Des Résultats théoriques sur les algorithmes Monte Carlo par chaînes de Markov**, Conférence plénière aux 41$^{\text{èmes}}$ journées de Statistique, mai 2009, Bordeaux

[11] Jeff. S. Rosenthal : **Optimal Proposal Distributions and Adaptive MCMC**, Chapter for MCMC Handbook, S. Brooks, A. Gelman, G. Jones, and X.-L. Meng, eds.

[12] D.A. Virkler, B.M. Hillberry and P.K. Goel, **The statistical nature of fatigue crack propagation**, J. Engng Mater Tech , Trans. ASME, 101 :148-153, 1979.