

Estimation des temps de sortie pour des processus markoviens déterministes par morceaux

Inria - équipe CQFD

26 novembre 2010

Sommaire

- 1 Présentation des PDP
 - Définition et exemple
 - Un modèle de corrosion
- 2 Temps de sortie
- 3 Approximation de la distribution du temps de sortie
 - Quantification
 - Méthode de calcul récursive
 - Résultats numériques
- 4 Approximation des moments du temps de sortie
 - Méthode de calcul récursive
 - Résultats numériques
- 5 Conclusion

Processus Markoviens Déterministes par Morceaux

Davis, 1980

PDP processus markovien $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+} = (m_t, \xi_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$.

- $m_t \in \{1, 2, \dots, p\}$ mode de fonctionnement du système
- $\xi_t \in \mathbb{R}^d$ variables qui caractérisent le système

Modéliser un système à évolution déterministe entre des sauts aléatoires.

Processus Markoviens Déterministes par Morceaux

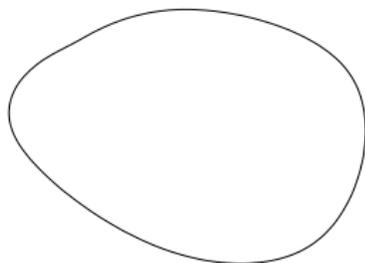
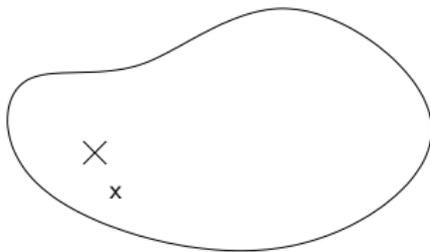
Trois caractéristiques locales :

- Φ trajectoire déterministe du processus entre deux instants de saut
- λ intensité des sauts aléatoires
- Q noyau markovien, détermine la position du processus après un saut

2 types de sauts : aléatoires et déterministes.

Construction d'une trajectoire

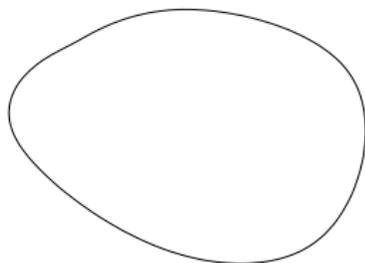
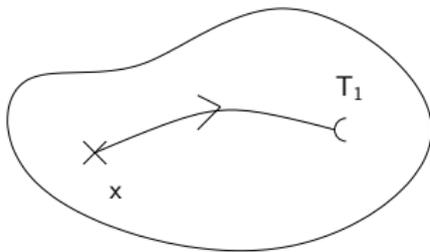
Point de départ $X_0 = x$



Construction d'une trajectoire

Premier saut à l'instant $T_1 = T_0 + S_1$:

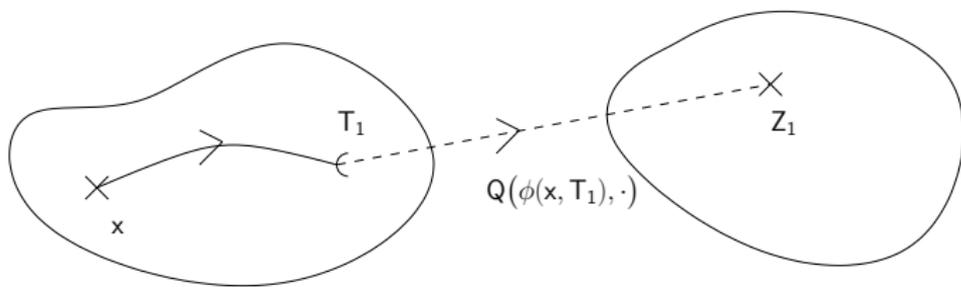
$$X_t = \phi(x, t), \quad t < T_1$$



Construction d'une trajectoire

Position après le saut Z_1 est choisie selon la loi

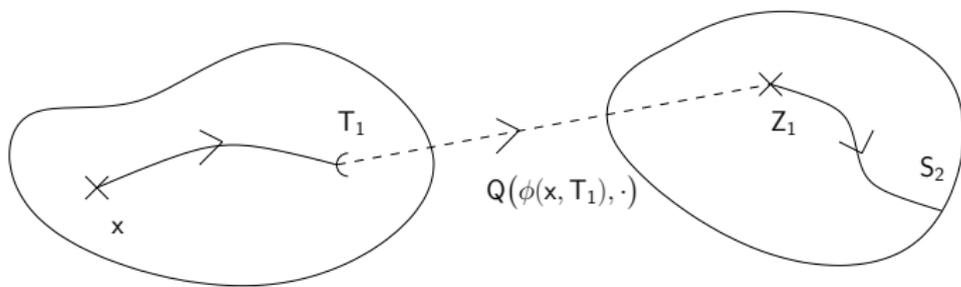
$$Q(\phi(x, T_1), \cdot)$$



Construction d'une trajectoire

Nouveau saut à l'instant $T_2 = T_1 + S_2$:

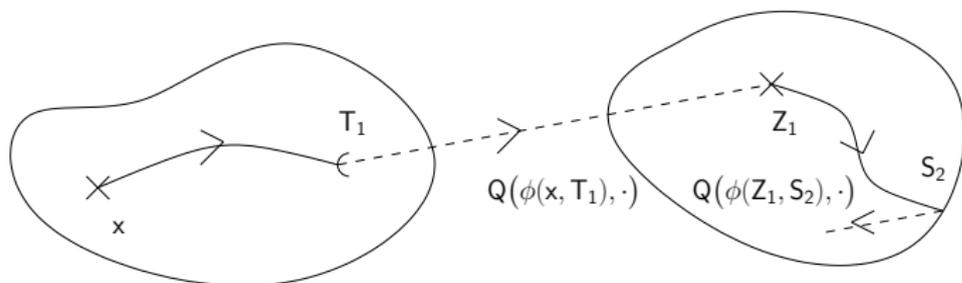
$$X_t = \phi(Z_1, t - T_1), \quad T_1 \leq t < T_1 + S_2$$



Construction d'une trajectoire

Position après le saut Z_2 est choisie selon la loi

$$Q(\phi(Z_1, S_2), \cdot) \dots$$



Exemple : processus de Poisson

Définition du processus



$$X_t = t + N_t$$

N_t processus de Poisson de paramètre 1

- un seul mode
- $\lambda = 1$ constant
- $\Phi(x, t) = x + t$
- $Q(\{x + 1\}; x) = 1$

Exemple : processus de Poisson

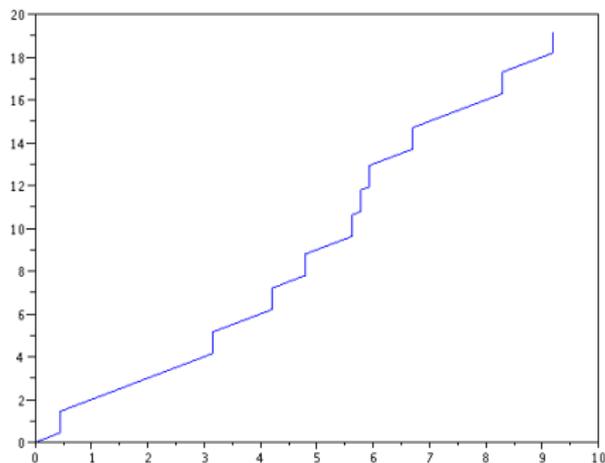


FIGURE: Une trajectoire du processus jusqu'au 10^{ème} temps de saut.

Modèle de corrosion

Une structure en aluminium séjourne successivement dans 3 ambiances et est susceptible d'être dégradée par corrosion. On s'intéresse à la perte d'épaisseur notée d .

Paramètres d'évolution

- m ambiance : mode du processus
- γ durée de protection anti-corrosion
- ρ taux de corrosion
- η durée de transition

On pose $X = (m, d, \gamma, \rho)$.

Un modèle de corrosion

Caractéristiques du processus

- Perte d'épaisseur

$$d(t) = \rho \left(t - \gamma + \eta \left(e^{-\frac{t-\gamma}{\eta}} - 1 \right) \right) \mathbf{1}_{\{t \geq \gamma\}}$$

- S_i temps de séjour dans l'ambiance i , loi $\mathcal{E}(\lambda_i)$
- d continu entre les sauts
- γ choisi initialement selon une loi de Weibull
- η constant dans chaque ambiance
- ρ retiré après chaque saut

Exemple de trajectoires

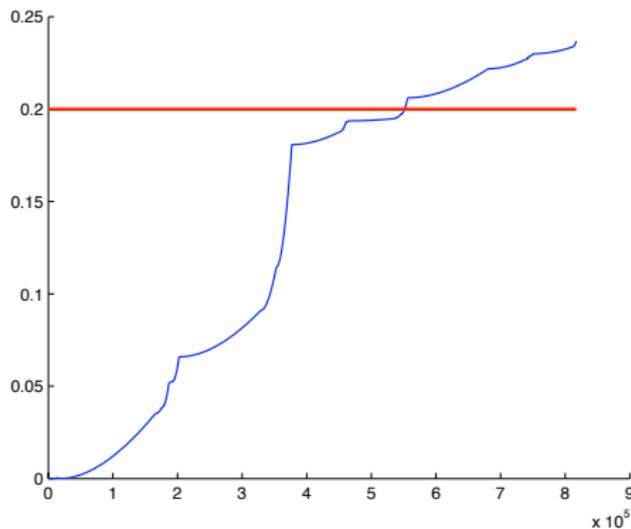


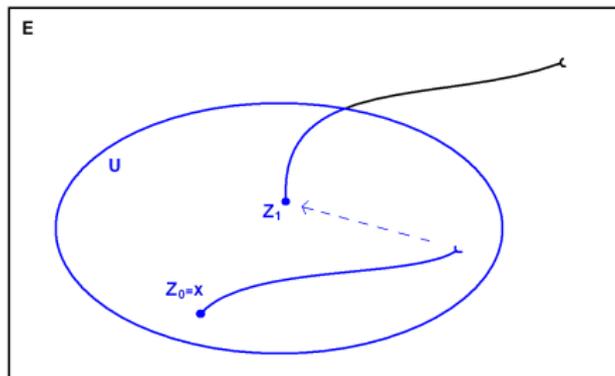
FIGURE: Trajectoire du processus (perte d'épaisseur en mm)

- 1 Présentation des PDP
 - Définition et exemple
 - Un modèle de corrosion
- 2 Temps de sortie
- 3 Approximation de la distribution du temps de sortie
 - Quantification
 - Méthode de calcul récursive
 - Résultats numériques
- 4 Approximation des moments du temps de sortie
 - Méthode de calcul récursive
 - Résultats numériques
- 5 Conclusion

Temps de sortie

(X_t) évolue dans un domaine E .

On s'intéresse au temps de sortie τ d'un certain sous-ensemble ouvert $U \subset E$.



Fonction de survie

$$\mathbf{P}_{x_0}(\mathcal{T} > s)$$

Moments

$$\mathbf{E}_{x_0}[\mathcal{T}^j]$$

Horizon de calcul

Horizon de calcul N

- τ remplacé par $\tau \wedge T_N$
- lorsque $N \rightarrow +\infty$

$$\mathbf{P}_{x_0} (\tau > s | \tau \leq T_N) \rightarrow \mathbf{P}_{x_0} (\tau > s)$$

$$\mathbf{E}_{x_0} [(\tau \wedge T_N)^j] \rightarrow \mathbf{E}_{x_0} [\tau^j]$$

Estimation de l'horizon de calcul

Choix de N : estimation de $\mathbf{P}_{x_0}(\tau > T_N)$

- Le lien entre τ et T_k dépend largement du problème considéré
- Estimation par Monte Carlo
- Bornes théoriques disponibles sous certaines conditions

- 1 Présentation des PDP
 - Définition et exemple
 - Un modèle de corrosion
- 2 Temps de sortie
- 3 Approximation de la distribution du temps de sortie
 - Quantification
 - Méthode de calcul récursive
 - Résultats numériques
- 4 Approximation des moments du temps de sortie
 - Méthode de calcul récursive
 - Résultats numériques
- 5 Conclusion

Quantification d'une variable aléatoire

Approcher une variable continue par une variable discrète.
Bally, Pagès, Pham, Printems.

Quantification d'une variable aléatoire X

- Grille Γ fini
- Variable quantifiée $\hat{X} = \text{proj}_{\Gamma}(X)$
- Propriété de convergence de l'approximation

$$\|X - \hat{X}\|_p \rightarrow 0$$

Quantification du processus (Z_n, T_n)

Quantification de la chaîne (Z_n, T_n)

- Suite de grilles $\Gamma_n \subset E \times \mathbb{R}^+$, nombre de points fixe
- $(\hat{Z}_n, \hat{T}_n) = \text{proj}_{\Gamma_n}(Z_n, T_n)$
- Probabilités de transition estimées par la méthode de Monte-Carlo.

Schéma d'approximation de la distribution

$$p_k(s) = \mathbf{P}_{x_0}(\tau > s | \tau \leq T_k).$$

Stratégie d'approximation

- 1 Trouver une relation de récurrence vérifiée par (p_k)
- 2 Exprimer cette récurrence en fonction de la chaîne à temps discret (Z_k, T_k)
- 3 Remplacer (Z_k, T_k) par (\hat{Z}_k, \hat{T}_k)
- 4 Obtenir une approximation (\hat{p}_k) de (p_k)

Calcul récursif de la distribution

$s > 0$ et $k \leq N$, on pose :

$$\begin{cases} p_k(s) &= \mathbf{P}_{x_0}(\tau > s | \tau \leq T_k), \\ q_k &= \mathbf{P}_{x_0}(\tau \leq T_k), \\ r_k(s) &= \mathbf{P}_{x_0}(\{\tau > s\} \cap \{T_k < \tau \leq T_{k+1}\}). \end{cases}$$

Relation de récurrence

$$\begin{cases} p_0 &= 0, \\ p_{k+1} &= \frac{p_k q_k + r_k}{q_{k+1}}. \end{cases}$$

Utilisation de la chaîne (Z_k, T_k)

avec la chaîne (Z_k, T_k)

$$\begin{cases} q_k &= \mathbf{E}_{x_0}[\mathbb{1}_{U^c}(Z_k)], \\ r_k(s) &= \mathbf{E}_{x_0}[\mathbb{1}_{\{(T_k + u^*(Z_k)) \wedge T_{k+1} > s\}} \mathbb{1}_U(Z_k) \mathbb{1}_{U^c}(Z_{k+1})]. \end{cases}$$

$u^*(x)$ temps pour que le flot partant du point x atteigne la frontière de U .

Approximation par quantification des paramètres de la récurrence

Approximations quantifiées de q_k et r_k

$$\begin{cases} \hat{q}_k &= \mathbf{E}_{x_0}[\mathbb{1}_{U^c}(\hat{Z}_k)], \\ \hat{r}_k(s) &= \mathbf{E}_{x_0}[\mathbb{1}_{\{(\hat{T}_k + u^*(\hat{Z}_k)) \wedge \hat{T}_{k+1} > s\}} \mathbb{1}_U(\hat{Z}_k) \mathbb{1}_{U^c}(\hat{Z}_{k+1})]. \end{cases}$$

- Sommes finies
- On peut changer s
- On peut changer U

Approximation de la distribution et convergence

Approximation de $(p_k)_k$

$$\begin{cases} \hat{p}_0 &= 0, \\ \hat{p}_{k+1} &= \frac{\hat{p}_k \hat{q}_k + \hat{r}_k}{\hat{q}_{k+1}}. \end{cases}$$

Théorème

Hypothèses techniques sur U

$$\hat{p}_k \rightarrow p_k.$$

Résultats numériques - Poisson

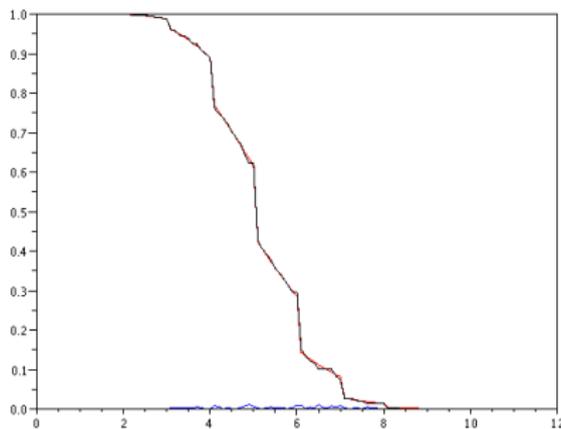


FIGURE: Processus de Poisson. Grilles de 200 points. Fonctions de survie exacte (rouge), approchée (noire) et erreur (bleue).

- 1 Présentation des PDP
 - Définition et exemple
 - Un modèle de corrosion
- 2 Temps de sortie
- 3 Approximation de la distribution du temps de sortie
 - Quantification
 - Méthode de calcul récursive
 - Résultats numériques
- 4 Approximation des moments du temps de sortie
 - Méthode de calcul récursive
 - Résultats numériques
- 5 Conclusion

Calcul récursif des moments

$j \geq 1$ et $k \leq N$, on pose :

$$\begin{cases} p_{k,j} &= \mathbf{E}_{x_0} [\tau^j | \tau \leq T_k], \\ r_{k,j} &= \mathbf{E}_{x_0} [\tau^j \mathbb{1}_{\{T_k < \tau \leq T_{k+1}\}}], \end{cases}$$

et à nouveau $q_k = \mathbf{P}_{x_0}(\tau \leq T_k)$.

Relation de récurrence

$$\begin{cases} p_{0,j} &= 0, \\ p_{k+1,j} &= \frac{p_{k,j}q_k + r_{k,j}}{q_{k+1}}. \end{cases}$$

Utilisation de la chaîne (Z_k, T_k)

avec la chaîne (Z_k, T_k)

$$\begin{cases} q_k &= \mathbf{E}_{x_0} [\mathbb{1}_{U^c}(Z_k)], \\ r_{k,j} &= \mathbf{E}_{x_0} \left[\left((T_k + u^*(Z_k)) \wedge T_{k+1} \right)^j \mathbb{1}_U(Z_k) \mathbb{1}_{U^c}(Z_{k+1}) \right]. \end{cases}$$

Approximations quantifiées de q_k et r_k

$$\begin{cases} \hat{q}_k &= \mathbf{E}_{x_0} [\mathbb{1}_{U^c}(\hat{Z}_k)], \\ \hat{r}_{k,j}(s) &= \mathbf{E}_{x_0} \left[\left((\hat{T}_k + u^*(\hat{Z}_k)) \wedge \hat{T}_{k+1} \right)^j \mathbb{1}_U(\hat{Z}_k) \mathbb{1}_{U^c}(\hat{Z}_{k+1}) \right]. \end{cases}$$

Convergence de la méthode

Approximation de $(p_{k,j})_k$

$$\begin{cases} \hat{p}_{0,j} &= 0, \\ \hat{p}_{k+1,j} &= \frac{\hat{p}_{k,j}\hat{q}_k + \hat{r}_{k,j}}{\hat{q}_{k+1}}. \end{cases}$$

Théorème

Hypothèses sur U

$$\|p_{k,j} - \hat{p}_{k,j}\|_p \leq C_j \|(Z_n, T_n) - (\hat{Z}_n, \hat{T}_n)\|_p$$

Résultats numériques - Poisson

Espérance du temps de sortie

Processus de Poisson

La vraie valeur est 5.

Nombre de points dans les grilles	$\hat{\rho}_{N,1}$	Erreur relative
20 points	5.050	1.0%
50 points	5.129	2.6%
200 points	5.118	2.4%

Résultats numériques - Corrosion

Premier moment

Modèle de corrosion

Valeur obtenue par Monte Carlo = $525,6 \times 10^3$ heures.

Nombre de points dans les grilles	$\hat{p}_{N,1}$ ($\times 10^3$ h)	Erreur relative
20 points	572,1	8.9%
50 points	568,7	8.2%
100 points	556,6	5.9%
200 points	551,0	4.8%

Conclusion

- Grilles de quantification peuvent être stockées et réutilisées
- Toute la fonction de survie et tous les moments
- Dans les deux cas : possibilité de changer U et donc τ